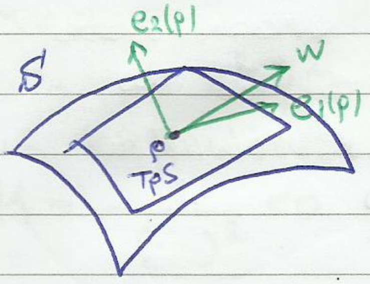


$L_p e_1(p) = k_1(p) \cdot e_1(p)$

$L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p)$

$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p$

Το σύνολο

$D(p)$ = Δηκνύασα Dipen

$= \{ w \in T_pS \ / \ II_p(w) = \pm 1 \}$

$w = x e_1(p) + y e_2(p)$

$II_p(w) = \langle L_p(x e_1 + y e_2), x e_1 + y e_2 \rangle = \langle x L_p e_1 + y L_p e_2, x e_1 + y e_2 \rangle$

$= \langle x \cdot k_1(p) e_1 + y k_2(p) e_2, x e_1 + y e_2 \rangle$

$II_p(w) = k_1(p) x^2 + k_2(p) y^2 = \pm 1 \leftarrow$ Κωνική τομή εν $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: Το $p \in S$ καλείται

1) Ελλειπτικό αν.ν $D(p)$ έλλειψη $\Leftrightarrow II_p$ θετικά ή αρνητικά ορισμένη

2) Υπερβολικό αν.ν $D(p)$ είναι υπερβολή (ζεύγος) $\Leftrightarrow II_p$ είναι αόριστη (λαμβάνει αρνητικές & θετικές τιμές)

3) Παραβολικό αν.ν $D(p)$ είναι ζεύγος παράλληλων ευθειών $\Leftrightarrow II_p$ θετικά ή αρνητικά ημιορισμένη $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow K(p)=0$ και $H(p) \neq 0$

4) Ισόπεδο: αν.ν $k_1(p) = k_2(p) = 0 \Leftrightarrow II_p = 0 \Leftrightarrow H(p) = 0 = K(p)$

5) Ομφαλικό αν.ν $k_1(p) = k_2(p) \neq 0 \Leftrightarrow H^2(p) = K(p) \neq 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

(1) Το P ελλειπτικό αν.ν $K(p) > 0$

(2) Το P υπερβολικό αν.ν $K(p) < 0$

(3) Το P παραβολικό αν.ν $K(p) = 0$ αλλά $H(p) \neq 0$

(4) Το P ισόπεδο αν.ν $K(p) = 0 = H(p) \Leftrightarrow e = f = g = 0$

(5) Το P ομφαλικό αν.ν. $II_p = \lambda I_p$, $\lambda \neq 0$

Για την (5): απαιτείται:

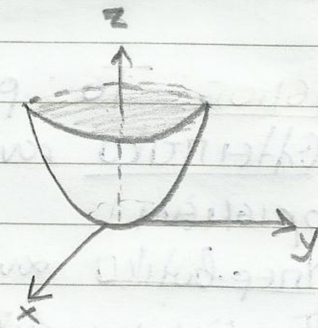
$$\text{Ρ ομφαλικό} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \ \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = \lambda E \\ f = \lambda F \\ g = \lambda G \end{cases} \Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0$$

Σχόλιο Σημείο που είναι ομφαλικό θα είναι και ελλειπτικό (διότι η καμπυλότητα Gauss τότε θα ήταν στο τετράγωνο, άρα ελλειπτικό).

Π.Χ 1

Έστω $h(x,y) = x^2 + y^2$



$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1+h_x^2+h_y^2)^2} = \frac{4}{(\dots)^2} > 0$$

όλα τα σημεία είναι ελλειπτικά

$$\left.\begin{aligned} E &= 1+4x^2 \\ F &= 4xy \\ G &= 1+4y^2 \end{aligned}\right\} \quad e = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = g, \quad f = 0$$

Παρατηρούμε, $\frac{e}{E} = 2$ και $\frac{g}{G} = 2$, $f = F = 0$

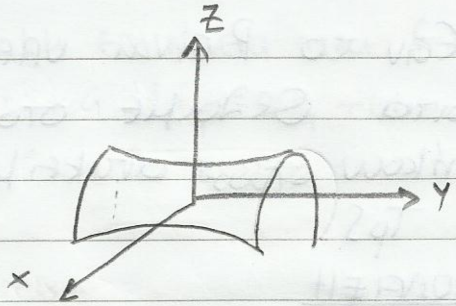
Άρα, το $(0,0,0)$ είναι ομφαλικό και μάλιστα το μοναδικό.

Π.χ 2

$h(x,y) = x^2 - y^2$

με καμπυλότητα Gauss

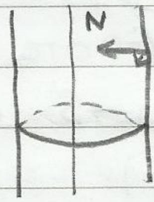
$K = -\frac{4}{(\dots)^2} < 0$



όλα τα σημεία είναι υπερβολικά

Π.χ 3

$S: x^2+y^2=r^2$



$II_p = \frac{1}{r}(w_1^2+w_2^2)$, $w \in T_pS$

και $w=(w_1,w_2,w_3)$ άρα τα σημεία όλα είναι παραβολικά

β' τρόπος

$K=0$ και $H=\frac{1}{2r}$ όλα παραβολικά

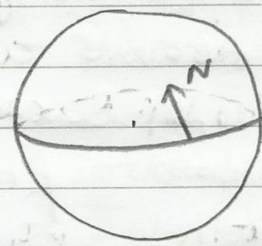
Π.χ 4

$II_p = 0$ όλα τα σημεία του επιπέδου είναι ισόπεδου

Π.χ 5

S_R^2, $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$

$$\left.\begin{array}{l} II_p = \frac{1}{R} I_p \\ k = \frac{1}{R^2} \text{ και } H = \frac{1}{R} \end{array}\right\} H^2 = k \neq 0$$



όλα ομφαλικά σημεία

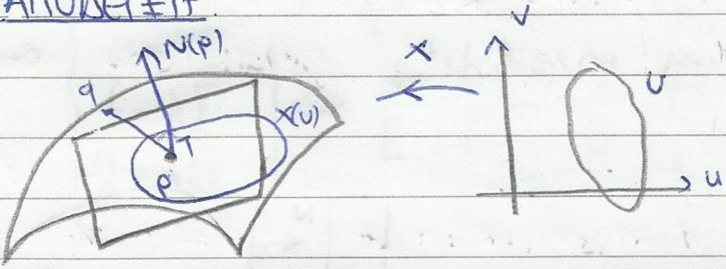
ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω S επιφάνεια και $p \in S$

1) Αν το p ελλειπτικό τότε υπάρχει περιοχή V του p στο S τ/ω $(V-\{p\}) \cap T_pS = \emptyset$.

2) Εάν το P είναι υπερβολικό τότε υπάρχουν όσο κοντά θέλουμε στο p σημεία της S που ανήκουν στους αντικείμενους ημιχώρους που ορίζει το T_pS.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με

$P = X(u_0, v_0)$

$\langle X(u,v) - X(u_0,v_0), N(p) \rangle = h(u,v)$

$h(u_0,v_0) = 0$, $h: U \to \mathbb{R}$ λεία

$h_u(u,v) = \langle X_u(u,v), N(p) \rangle$

$h_v(u,v) = \langle X_v(u,v), N(p) \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} h_u(u_0,v_0) = \langle X_u(u_0,v_0), N(p) \rangle = 0 \\ h_v(u_0,v_0) = \langle X_v(u_0,v_0), N(p) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (u_0,v_0) κρίσιμο σημείο για την h

$h_{uu}(u_0,v_0) = \langle X_{uu}(u_0,v_0), N(p) \rangle = e(u_0,v_0)$

$h_{uv}(u_0,v_0) = \langle X_{uv}(u_0,v_0), N(p) \rangle = f(u_0,v_0)$

$h_{vv}(u_0,v_0) = \dots = g(u_0,v_0)$

Άρα ο εσσιανός της h στο (u_0,v_0) είναι

$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}(u_0,v_0)$ ελάχιστο αν θετικά ορισμένος

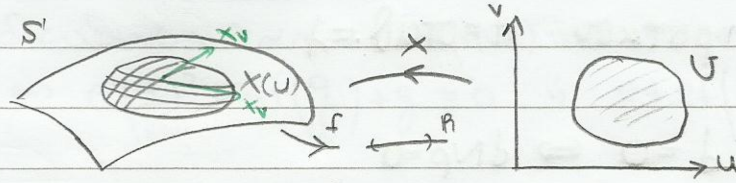
μέγιστο αν αρνητικά ορισμένος

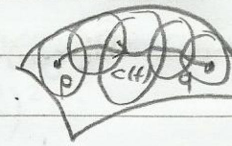
Υπάρχουν άλλες επιφάνειες με ιδιότητα $k_1 = k_2$;

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω S κανονική συνεκτική επιφάνεια και f λεία συνάρτηση. Αν για κάθε $p \in S$ είναι $df_p = 0$, τότε η f είναι σταθερή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x: U \to S$ με U συνεκτικό





$$\left.\begin{aligned} df(x_u)=0 &\iff (f\circ x)_u = 0 \\ df(x_v)=0 &\iff (f\circ x)_v = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f\circ x) \text{ σταθ στο } x(U)$$

Τώρα πρέπει νδο για τυχόντα p, q εν S η f έχει ίδια τιμή σε αυτά.

S κανονική $\Rightarrow \exists\, c: [0,1] \to S$ συνεχής με $c(0)=p$, $c(1)=q$

Για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει περιοχή V_t του $c(t)$ ώστε $f/_{V(t)} = \text{σταθερή} = \lambda_t$

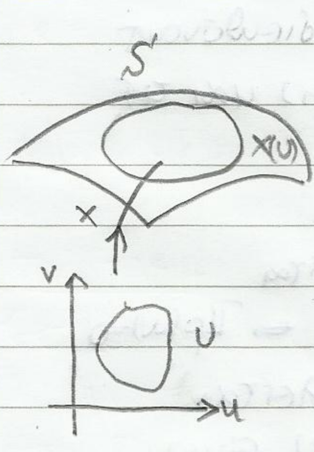
Όπου, $\underbrace{c([0,1])}_{\text{συμπαγές}} \subseteq \bigcup_{0\le t\le 1} V_t$, του $[0,1]$ συμπαγής,

Heine-Borel:

$$c([0,1]) \subseteq V_0 \cup V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_k}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια με $k_1 = k_2$ ($\iff H^2 = K$). Τότε η S είναι ανοικτό $\subseteq$ επιπέδου ή ανοικτό $\subseteq$ σφαίρας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω $x: U \to S$ σύστημα συντεταγμ.

$w = x e_1 + y e_2 \Rightarrow II_p(w) = k_1 x^2 + k_2 y^2 =$

$= k_1(x^2+y^2) = k_1\|w\|^2 = k_1 I_p(w)$

$\Rightarrow II_p(w) = k_1(p)\, I_p(w) \quad \forall w \Rightarrow$

$\Rightarrow L_p w = k_1(p) w$, $H = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L = k_1$

$L_p w = H(p) H$

$L_1 x_u = H x_u$, $L x_v = H x_v$

$\iff -(N\circ x)_u = H x_u$, $-(N\circ x)_v = H x_v$

$\Leftrightarrow -N_u = H X_u \,,\ -N_v = H X_v$

Παραγωγίζοντας

$-N_{uv} = H_v X_u + H X_{uv} \,,\quad -N_{vu} = H_u X_v + H X_{vu}$

$N_{vu} = N_{uv} \xRightarrow{X_{uv}=X_{vu}} H_v \cdot X_u - H_u X_v = 0 \Rightarrow H_u = H_v = 0$

$\Rightarrow dH(X_u) = 0$ και $dH(X_v) = 0 \Rightarrow dH = 0$ παντού

άρα από προηγούμενη πρόταση $H = \sigma\tau\alpha\theta. = \lambda$

1) $H = 0$, $L_p = H(p)\, Id = 0 \Leftrightarrow dN_p = 0$

$N : S \to S^2 \qquad N = (N_1, N_2, N_3)$

$0 = dN_p = (dN_{1p}, dN_{2p}, dN_{3p}) \Rightarrow N = \sigma\tau\alpha\theta$

Θα πρέπει η επιφάνεια να ανήκει σε επίπεδο

δηλ το $\langle P, N \rangle = \sigma\tau\alpha\theta$

Έστω λοιπόν $h(p) = \langle P, N \rangle$, $h : S \to \mathbb{R}$

$dh_p(w) = (h \circ c)'(0) = \langle c'(0), N \rangle = \langle w, N \rangle = 0$

$(w = c'(0)$, $p = c(0))$

$\xRightarrow{\text{πρόταση}} h = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow S$ περιέχεται σε επίπεδο $\perp N$

2) $H = \lambda \neq 0$, $L_p = c \cdot Id \Leftrightarrow -dN_p = c\, Id = 0$

$\Leftrightarrow dN_p + c\, Id = 0 \Leftrightarrow dN_p + c\, d_p Id = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d(N + \lambda Id)_p = 0 \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{R}^3) : \frac{1}{\lambda} N(p) + P = \frac{1}{\lambda} p_0 \,,\ \forall p \in S$

$\Rightarrow p - \frac{1}{\lambda} p_0 = -\frac{1}{\lambda} N(p) \Leftrightarrow d(P, -\frac{1}{\lambda} p_0) = \| -\frac{1}{\lambda} N(p) \| = \frac{1}{|\lambda|}$

Ασυμπτωτικές Διευθύνσεις

Ενδιαφερόμαστε για τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις ή ασυμπτωτικές καμπύλες μιας επιφάνειας και τις ορίζουμε ως:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S κανονική επιφάνεια

i) $P \in S$. Το διάνυσμα $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται ασυμπτωτική διεύθυνση στο $p \Leftrightarrow k_n(w) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_p(w) = 0$

ii) Μια καμπύλη κανονική $c : I \to S$ καλείται ασυμπτωτική καμπύλη του S αν.ν $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t \in I$.

Όπως να διάνυσμα

$w = a x_u + b x_v$ στο $x^{-1}(p)$

$II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2, \quad (a,b) \neq (0,0)$

<u>Συμπέρασμα</u>: Το $w = a x_u + b x_v$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση αν.ν $II_p(w) = 0 \Leftrightarrow ea^2 + 2fab + gb^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2f\left(\frac{a}{b}\right) + g = 0$ ή $e + 2f\left(\frac{b}{a}\right) + g\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0$

Εάν είναι δευτέρου βαθμού

- $\Delta = 4f^2 - 4eg = 4(f^2 - eg) \geq 0 \Leftrightarrow K(p) \leq 0$

1) Αν $\Delta = 0$ έχουμε απειρες ασυμπτωτικές διευθ.

2) Αν $\Delta < 0$ έχουμε 2 ασυμπτωτικές διευθ.